Závěrečná zkouška z matematiky 2014

T – A

1. Určete definiční obor funkce $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{20 + x - x^2}$. $[D_f = \langle -4; -\pi\rangle \cup \langle 0; \pi\rangle]$

2. Pro $x \in \mathbb{R}$ řešte rovnici: $2\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x \cos x = 1$
   $[x_1 = k\pi,\ x_2 = \frac{3}{4}\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}]$

3. Pro $x \in \mathbb{R}$ řešte rovnici: $3^{x+3} - 2 \cdot 3^{x+2} - 4 \cdot 3^x = 20$ $[x = \log_3 4]$

4. Pro $x \in \mathbb{R}$ řešte nerovnici: $\log^2 x - 4\log x \geq 8 - \log x^2$ $[x \in (0; 10^{-2}\rangle \cup \langle 10^4; \infty)]$

5. Graf funkce $y = \log_3\left(x^2 + \dfrac{1}{9}\right)$ protíná osu x v bodech A a B a osu y v bodě C.

   Určete obsah trojúhelníka ABC. $[S = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}]$

6. Pro $z \in \mathbb{C}$ řešte rovnici: $|z + \mathrm{i}| = 2z + \mathrm{i}$ a výsledek zapište v algebraickém tvaru.
   $[z = \dfrac{\sqrt{3}}{6} - \dfrac{\mathrm{i}}{2}]$

7. Součet prvních n členů aritmetické posloupnosti je dán vztahem $S_n = 9n^2 - 70n$. Určete vztah pro n-tý člen posloupnosti. $[a_n = S_n - S_{n-1} = 18n - 79]$

8. Z číslic 0, 0, 0, 0, 2, 2, 8, 8 vytvoříme všechna osmimístná kladná čísla. Kolik takových čísel existuje? Výsledek spočítejte numericky. $[2 \cdot \dfrac{7!}{4!2!} = 210]$

9. Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$, pro které jsou přímky $p : ax - y + 2 = 0$ a $q : 6x + (a - 5)y - 7 = 0$ rovnoběžné. $[a_1 = 3,\ a_2 = 2]$

10. Určete rovnice tečen ke kružnici $k : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0$ z bodu $\mathsf{A}[5; 1]$.
    $[t_1 : x - y - 4 = 0,\ t_2 : x + y - 6 = 0]$

Závěrečná zkouška z matematiky 2014

T – B

1. Určete definiční obor funkce $y = \sqrt{\tan x} + \sqrt{4 + 3x - x^2}$. $[D_f = \langle 0; \frac{\pi}{2}) \cup \langle \pi; 4 \rangle]$

2. Pro $x \in \mathbb{R}$ řešte rovnici: $\sin^2 x + 2\cos^2 x + \sin x \cos x = 1$
$[x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x_2 = \frac{3}{4}\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}]$

3. Pro $x \in \mathbb{R}$ řešte rovnici: $7 \cdot 2^{x+2} - 2^{x+4} - 9 \cdot 2^x = 15$ $[x = \log_2 5]$

4. Pro $x \in \mathbb{R}$ řešte nerovnici: $\log^2 x - 5\log x \geq 10 - \log x^2$ $[x \in (0; 10^{-2}\rangle \cup \langle 10^5; \infty)]$

5. Graf funkce $y = \log_4\left(x^2 + \dfrac{1}{4}\right)$ protíná osu x v bodech A a B a osu y v bodě C.
Určete obsah trojúhelníka ABC. $[S = \dfrac{\sqrt{3}}{2}]$

6. Pro $z \in \mathbb{C}$ řešte rovnici: $|z - \mathrm{i}| = 5(z + 3\mathrm{i})$ a výsledek zapište v algebraickém tvaru.
$[z = \dfrac{\sqrt{6}}{3} - 3\mathrm{i}]$

7. Součet prvních n členů aritmetické posloupnosti je dán vztahem $S_n = 9n - 2n^2$.
Určete vztah pro n-tý člen posloupnosti. $[a_n = S_n - S_{n-1} = 11 - 4n]$

8. Z číslic 0, 0, 0, 3, 3, 3, 8, 8 vytvoříme všechna osmimístná kladná čísla. Kolik takových čísel existuje? Výsledek spočítejte numericky. $[\frac{8!}{3!3!2!} - \frac{7!}{3!2!2!} = 350]$

9. Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$, pro které jsou přímky
$p : (a - 4)x - 2ay + 2 = 0$ a $q : 4x + (a + 8)y - 7 = 0$ kolmé. $[a_1 = -2,\ a_2 = -4]$

10. Určete rovnice tečen ke kružnici $k : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0$ z bodu $\mathsf{A}[-1; 5]$.
$[t_1 : x - y + 6 = 0,\ t_2 : x + y - 4 = 0]$

Závěrečná zkouška z matematiky 2014

E – A

1. Určete definiční obor funkce $y = \ln \dfrac{2-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}$ $[D_f = \langle -1; 3)]$

2. Pro $x \in \mathbb{R}$ řešte rovnici: $\cos 2x + 5 \sin x + 2 = 0$
   $[x_1 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi,\ x_2 = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}]$

3. Pro $x \in \mathbb{R}$ řešte rovnici: $2 \cdot 3^{x+2} - 16 \cdot 3^x + 3^{x+1} = 45$ $[x = 2]$

4. Pro $x \in \mathbb{R}$ řešte nerovnici: $\log_3^2(3x) + \log_3(3x) \geq 6$ $[x \in (0; 3^{-4}\rangle \cup \langle 3; \infty)]$

5. Graf funkce $y = x^2+4x-5$ protíná osu x v bodech A a B. Určete obsah trojúhelníka ABV, kde bod V je vrchol paraboly. $[S = 27]$

6. Zjednodušte a výsledek napište v algebraickém tvaru: $\dfrac{(1-\mathrm{i})^3 - 1}{(1+\mathrm{i})^3 + 1}$ $[= -\dfrac{1}{5} + \dfrac{8}{5}\mathrm{i}]$

7. Přičteme-li totéž číslo k číslům 2, 7, 17, dostaneme první tři členy geometrické posloupnosti. Určete šestý člen této posloupnosti. $[a_6 = 160]$

8. Ve třídě je 10 chlapců a 15 dívek. Kolika způsoby z nich můžeme vybrat trojici, ve které je aspoň jeden chlapec a aspoň jedna dívka? (Na pořadí výběru nezáleží.) Výsledek spočítejte numericky. $[\binom{10}{1}\binom{15}{2} + \binom{10}{2}\binom{15}{1} = 1725]$

9. Přímka p prochází body $\mathsf{A}[4; -5]$ a $\mathsf{B}[2; 3]$. Určete obecnou rovnici přímky q, která je rovnoběžná s přímkou p a prochází bodem $\mathsf{P}[7; 4]$. $[q : 4x + y - 32 = 0]$

10. V rovině je dána kružnice $k : x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$. Kružnice protíná kladnou část osy x v bodě X a kladnou část osy y v bodě Y. Určete
    (a) střed a poloměr kružnice k $[\mathsf{S}[0; 2],\ r = 3]$
    (b) vzdálenost bodů $|\mathsf{XY}|$. $[|\mathsf{XY}| = \sqrt{30}]$

Závěrečná zkouška z matematiky 2014

E – B

1. Určete definiční obor funkce $y = \ln \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}+1}$ $[D_f = \langle -1; 0)]$

2. Pro $x \in \mathbb{R}$ řešte rovnici: $\cos 2x + 3\cos x - 1 = 0$ $[x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}]$

3. Pro $x \in \mathbb{R}$ řešte rovnici: $9 \cdot 2^{x+1} - 2^{x+4} + 3 \cdot 2^{x} = 40$ $[x = 3]$

4. Pro $x \in \mathbb{R}$ řešte nerovnici: $\log_2^2(2x) - \log_2(2x) \geq 6$ $[x \in (0; \frac{1}{8}\rangle \cup \langle 4; \infty)]$

5. Graf funkce $y = x^2 - 2x - 15$ protíná osu x v bodech A a B. Určete obsah trojúhelníka ABV, kde bod V je vrchol paraboly. $[S = 64]$

6. Zjednodušte a výsledek napište v algebraickém tvaru: $\dfrac{(1-\mathrm{i})^3+1}{(1+\mathrm{i})^3-1}$ $[= -\dfrac{1}{13} + \dfrac{8}{13}\mathrm{i}]$

7. Odečteme-li totéž číslo od čísel 6, 12, 30, dostaneme první tři členy geometrické posloupnosti. Určete pátý člen této posloupnosti. $[a_5 = 243]$

8. Ve třídě je 10 chlapců a 8 dívek. Kolika způsoby z nich můženıe vybrat pětici, ve které jsou aspoň dva chlapci a aspoň dvě dívky? (Na pořadí výběru nezáleží.) Výsledek spočítejte numericky. $[\binom{10}{3}\binom{8}{2} + \binom{10}{2}\binom{8}{3} = 5880]$

9. Přímka p prochází body $\mathsf{A}[-3; 3]$ a $\mathsf{B}[0; 5]$. Určete obecnou rovnici přímky q, která je kolmá na přímku p a prochází bodem $\mathsf{P}[1; 1]$. $[q : 3x + 2y - 5 = 0]$

10. V rovině je dána kružnice $k : x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$. Kružnice protíná zápornou část osy x v bodě X a zápornou část osy y v bodě Y. Určete
    (a) střed a poloměr kružnice k $[\mathsf{S}[2; 0],\ r = 3]$
    (b) vzdálenost bodů $|\mathsf{XY}|$. $[|\mathsf{XY}| = \sqrt{6}]$